789. Riemann integral ヨリ Jordan measure ヲ作ルコト.

國澤　清典（阪大）

S. Bochner ハ Proc. Nat. Acad. U.S.A. 25-3 (1939) ニ於テ次ノ定理ヲ述ベテヰル。[1]

定理.　C ヲ空間 G デ定義サレタ實數値[2]ノ有界函數ノ集合トシコレガ次ノ性質ヲモツテヰルモノトスル。

$1°$　$f(x) \equiv 1$ ハ C ニ屬スル.

$2°$　$f_1(x), f_2(x) \in C$ ナラバ $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \in C$.

$3°$　$f(x) \in C$ ナラバ $|f(x)| \in C$.

今若シ各々ノ $f(x) \in C$ ニ對シテソノ mean $M_x(f)$ ガ定義サレテコレガ

$4°$　$M_x(1) = 1$

$5°$　$M_x(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 M_x(f_1) + c_2 M_x(f_2)$

$6°$　$f(x) \geqq 0$ ナラバ $M_x(f) \geqq 0$

ヲ滿足シテ居レバ、G ノ部分集合ノ family $\mathfrak{X} = \{E\}$ 及ビソコデ定義サレタ Jordan measure $v(E)$ ヲ定メテ、コノ Jordan measure $v(E)$ ニ關シテ C ノ各々 $f(x)$ ガ Riemann integrable トナリ、シカモソノ integral

---

(1) S. Bochner: Additive set functions on groups.

(2) Bochner ハ複素數値ノ函數アモ考ヘテヰルガ實數値ノ函數ノ場合ノミヲ考ヘレバ十分デアル。

ず丁度 $M_x(f)$ ニ等シクナル様ニスルコトガ出來ル。

即チ G ノ部分集合ノ *family* $\mathfrak{X}=\{E\}$ トソコデ定義サレタ *measure* $v(E)$ ヲ定メテコレガ

7° $\Lambda \in \mathfrak{X}$; $E \in \mathfrak{X}$ ナラバ $G-E \in \mathfrak{X}$

8° $E_1, E_2 \in \mathfrak{X}$ ナラバ $E_1 \cdot E_2 \in \mathfrak{X}$, $E_1+E_2 \in \mathfrak{X}$

9° $0 \leqq v(E) \leqq 1$, $v(\Lambda)=0$, $v(G)=1$

10° $E_1 \cdot E_2=\Lambda$ ナラバ $v(E_1+E_2)=v(E_1)+v(E_2)$

ヲ滿足シ、且ツ任意ノ $f(x) \in C$ 及ビ任意ノ *real number* α, β ニ對シテ $\underset{x}{E}[\alpha < f(x) \leqq \beta]$ ハ $\mathfrak{X}$ ニ屬シテ

$$(R)\int_G f(x)\,dv(x)=M_x(f)$$

トナル様ニスルコトガ出來ル。

コノ定理ハ *Riemann integral* ヨリ逆ニ *Jordan measure* ヲ決定スル方法トシテ興味ガアル。G ガ *normal* ナ *topological space* デ C ガソコデノ有界ナ實數値ノ連續函數全体デアル場合ハ A. Markoff ガ最近論ジテヰルガ(3), 今ノ場合ハ G ニ *topology* ヲ入レテナイカラ、コレトハ異ルノデアル。

Bochner ハ證明ヲ述ベテヰナイノデ、ドノ様ニシテ證明シタカワカラナイ。次ニコノ定理ノ簡單ナ證明ヲ與ヘル。證明ノ手段トシテ *Banach* ノ *extension theorem*

---

(3) A. Markoff: On mean values and exterior densities, Recueil Math., 46-1. (1938), 165-191.

ヲ使ツタタメ．是トシテ G ノスベテノ部分集合ノ族ガ出テ来ルコトハ注目スベキコトデアロウ。

先ヅ G デ定義サレタアラユル有界ナ実数値ノ函数ノ集合ヲ考ヘ、コレヲ C^* トスル。C ハ C^* ノ linear subspace デアル。ヨツテ C デ定義サレタ linear functional $M_x(f)$ ハ C^* 全体ヘ linear ニ拡張スルコトガ出来ル。シカモ $M_x(f)$ ハ C デ positive[4] ナ linear functional デアルカラ、$M_x(f)$ ノ extension $M_x^*(f)$ ガ C^* デ positive linear functional ニナル様ニスルコトガ出来ル。

コノタメニハ次ノ如クスレバヨイ。即チ、任意ノ $\varphi(x)\in C^*$ ニ對シテ $\varphi(x)\leqq f(x)$ (for all $x\in G$) ナル如キ $f(x)\in C$ ヲトリ（コノ様ナ $f(x)$ ハ確カニ存在スル）。カヽル $f(x)$ 全体ニ對スル $M_x(f)$ ノ下限ヲ $p(\varphi)$ トオク．$p(\varphi)$ ハ明カニ

(i) $p(\varphi+\psi)\leqq p(\varphi)+p(\psi)$

(ii) $p(a\varphi)=a\cdot p(\varphi)$, $a\geqq 0$

ヲ満足スル。ヨツテスベテノ $\varphi\in C^*$ ニ對シテ $M_x^*(\varphi)\leqq p(\varphi)$ ヲ満足スル如キ $M_x(f)$ ノ extension $M_x^*(\varphi)$ ガ存在スル。$M_x^*(\varphi)$ ガ positive ナルコトハ $\varphi\geqq 0$ ナルトキ $-M_x^*(\varphi)=M_x^*(-\varphi)\leqq p(-\varphi)\leqq 0$ トナルコトヨリワカル。

次ニ任意ノ G ノ部分集合 E ニ對シテ $\upsilon(E)=M_x^*(\varphi_E(x))$

---

(4) $f(x)\geqq 0$ ナルトキ $M_x(f)\geqq 0$ トナルコト。

(但シ $\varphi_E(x)$ ハ E ノ *characteristic function*)

トオケバ $v(E)$ ガ求ムル Jordan measure デアル。

$v(E)$ ガ 9°, 10° ヲ満足スルコトハ明カデアルカラ

$\int_G f(x)\,dv(x) = M_x(f)$ トナルコトヲ示サウ。コノタメニ

$|f(x)| < M$ *for all* $x \in G$ ナル如キ M ヲトリ $-M = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots\cdots < \alpha_n = M$ ナル分割 Δ ヲ考ヘル。

$$M(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v(E_i) = M_x^*\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_{E_i}(x)\Big),$$

$$m(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1} \cdot v(E_i) = M_x^*\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1} \cdot \varphi_{E_i}(x)\Big),$$

$$E_i = \underset{x}{E}\,[\alpha_{i-1} < f(x) \leqq \alpha_i]$$

トオケバ明カニ

$$0 \leqq M(f,\Delta) - m(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \cdot v(E_i)$$
$$\leqq |\Delta| \equiv \max_{1 \leqq i \leqq n} (\alpha_i - \alpha_{i-1})$$

ニテ且ツ $M_x^*(f)$ ガ *positive linear functional* デアルコト $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1} \varphi_{E_i}(x) \leqq f(x) \leqq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_{E_i}(x)$ ナルコト

トヨリ

$$m(f, \Delta) \leqq M_x^*(f) = M_x(f) \leqq M(f, \Delta)$$

ヨッテ $|\Delta| \to 0$ ナルトキ $\lim_{|\Delta|\to 0} M(f, \Delta)$, $\lim_{|\Delta|\to 0} m(f, \Delta)$

ハ存在シテ、何レモ $M_x(f)$ ニ等シイ。即チ $\int_G f(x)\,dv$ ガ存

在シテ $M_x(f)$ ニ等シイ。